Université de Haute-Alsace
2022/2023
Outils Géométrie CPB 1 ENSCMU - PC renfort
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 2 : Géométrie dans le plan et dans l'espace

L'objectif de ce chapitre est de revoir certaines notions de géométrie de terminale, en les approfondissant et en utilisant de nouveaux outils, dans le but d'introduire la notion d'espace vectoriel, qui fera l'objet du chapitre suivant.

1 Rappels sur les vecteurs

On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$, muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou dans l'espace $\mathbb{R}^3$, muni d'un repère orthonormé $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition 1

Soient A et B deux points. Un vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ est défini par :

1. sa direction : la droite (AB) ;
2. son sens : de A vers B ;
3. sa longueur (ou norme), notée $|\overrightarrow{AB}|$.

Proposition 2 (Propriétés immédiates)

1. Soient A, B deux points. Il existe un unique vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
2. Sent A un point et $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe un unique point B tel que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
3. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur. Il existe une infinité de points A, B tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$.
4. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABCD$ est un parallélogramme.

Opérations sur les vecteurs :

- Addition : si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{BC}$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "\overrightarrow{AB}"] \arrow[dr, "\overrightarrow{AC}"'] & & B \arrow[dl, "\overrightarrow{BC}"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

- Multiplication par un scalaire : soient $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors le vecteur $\lambda\overrightarrow{u}$ a même direction que $\overrightarrow{u}$, même sens si $\lambda > 0$, sens opposé si $\lambda < 0$, et $|\lambda\overrightarrow{u}| = |\lambda||\overrightarrow{u}|$.

Remarque. Il faut s'habituer petit à petit à cesser de noter les vecteurs avec des flèches. Ainsi, lorsque ce sera clair, on ne notera plus les flèches. En règle générale, on note les points par des majuscules et les vecteurs par des minuscules. Les scalaires (éléments de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) seront autant que possible notés par des lettres grecques.

Proposition 3

Soient u, v, w trois vecteurs et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

1. La loi $+$ est associative : $u + (v + w) = (u + v) + w$;
2. Le vecteur nul $\overrightarrow{0}$ est neutre pour la loi $+$: $0 + u = u + 0 = u$;
3. Pour tout vecteur u, il existe un vecteur $-u$ tel que $u + (-u) = 0$;
4. La loi $+$ est commutative : $u + v = v + u$;
5. $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$;
6. $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$;
7. $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$;
8. $1 \times u = u$.

On dit que l'ensemble des vecteurs du plan (ou de l'espace) est un **espace vectoriel**. On verra au chapitre suivant une définition générale de cette notion, ainsi que d'autres exemples.

Définition 4

- Deux vecteurs u et v sont dits **colinéaires** s'ils ont même direction, *ie* s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$.
- Trois vecteurs u, v et w sont dits **coplanaires** s'ils sont contenus dans le même plan, *ie* s'il existe $\lambda, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $u = \lambda v + \gamma w$.

2 Coordonnées

On considère un repère orthonormé de l'espace $(0, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Un point M de l'espace est repéré par ses trois coordonnées : $M = \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} = (x_M, y_M, z_M)$. Le vecteur $\overrightarrow{0M}$ a également pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix}$.
Rappelons quelques règles de calcul avec les coordonnées :

- Si $A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$ et $B \begin{pmatrix} x_B \\ y_B \\ z_B \end{pmatrix}$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$.
- Si $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, alors $u + v$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \\ z + z' \end{pmatrix}$.
- Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, alors λu a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$.

Définition 5

Une **norme** est une application $N : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie :

1. Pour $u \in \mathbb{R}^3$, $N(u) = 0 \Longleftrightarrow u = \overrightarrow{0}$;
2. $\forall u \in \mathbb{R}^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$;
3. (inégalité triangulaire) $\forall u, v \in \mathbb{R}^3$, $N(u + v) \leq N(u) + N(v)$.

Exemple : Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. On pose $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$. C'est une norme, appelée **norme euclidienne**.

- Soient $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}$. On définit alors :
$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}.$$
- Soient $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. On définit de même :
$$\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

Proposition 6

Avec les notations ci-dessus :
1. $\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}$ colinéaires $\iff \det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = 0$;
2. $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ coplanaires $\iff \det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}) = 0$.

Démonstration.
1. Si $\overrightarrow{a}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{b}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires, alors il existe un réel λ tel que $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$. Dès lors,
$$\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda x' & x' \\ \lambda y' & y' \end{vmatrix} = 0.$$
Réciproquement, si $\det(\overrightarrow{a},\overrightarrow{b}) = 0$, alors $xy' = x'y$, d'où, en supposant x' et y' non nuls, $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$. Ainsi, il existe un réel λ tel que $x = \lambda x'$ et $y = \lambda y'$.
2. Exercice.

□

Notation :
- si $u \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathrm{Vect}(u) = \mathbb{R}\,u = \left\{v \in \mathbb{R}^2,\ \exists\,\lambda \in \mathbb{R},\ v = \lambda u\right\}$;
- si $u, v \in \mathbb{R}^3$, on note $\mathrm{Vect}(u,v) = \mathbb{R}(u,v) = \left\{w \in \mathbb{R}^3,\ \exists\,\lambda,\mu \in \mathbb{R},\ w = \lambda u + \mu v\right\}$.

3 Produit scalaire

Définition 7

On définit un **produit scalaire** sur $\mathbb{R}^3$, pour $u\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$, par
$$\langle u, v\rangle = xx' + yy' + zz'.$$
On le note parfois $u \cdot v$.

Remarque. On a l'égalité $\|u\| = \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Le résultat du produit scalaire de deux vecteurs est un **nombre réel**. C'est donc un scalaire, d'où le nom.

Proposition 8 (Propriétés)

Soient u, v, w trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et λ un réel.

1. $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$;
2. $\langle \lambda u, v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle = \lambda \langle u, v\rangle$;
3. $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.
4. $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle$.

Remarque. Une application $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les points 1, 2 et 3 est appelée **forme bilinéaire symétrique**.

Proposition 9 (Inégalité de Cauchy Schwartz)

Soient u, v deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

$$|\langle u, v\rangle| \leq ||u|| \times ||v||.$$

Remarque. Cette inégalité peut aussi s'écrire $\sqrt{\langle u, v\rangle^2} \leq ||u|| \times ||v||$.

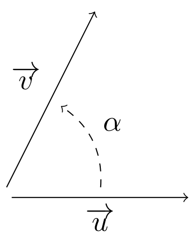
Démonstration.

$$\begin{aligned}
&\| \|u\| v - \|v\| u\|^2 \geq 0 \\
\Rightarrow\ & \|u\|^2 \langle v, v\rangle + \|v\|^2 \langle u, u\rangle - 2\|u\|\|v\|\langle u, v\rangle \geq 0 \\
\Rightarrow\ & 2\|u\|\|v\|\langle u, v\rangle \leq \|u\|^2 \langle v, v\rangle + \|v\|^2 \langle u, u\rangle \\
\Rightarrow\ & 2\|u\|\|v\|\langle u, v\rangle \leq \langle u, u\rangle \langle v, v\rangle + \langle v, v\rangle \langle u, u\rangle \\
\Rightarrow\ & 2\|u\|\|v\|\langle u, v\rangle \leq 2\|u\|^2\|v\|^2 \\
\Rightarrow\ & |\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|
\end{aligned}$$

□

Lien entre produit scalaire et angles :

Si u et v sont deux vecteurs, on note α l'angle obtenu en tournant dans le sens trigonométrique (↺), de u vers v.



On a alors une expression alternative du produit scalaire :

$$\langle u, v\rangle' = ||u||.||v||.\cos(\alpha).$$

Avec cette expression, la proposition suivante est immédiate :

Proposition 10

1. $u \perp v \Longleftrightarrow \alpha = \pm\frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle' = 0$;
2. u colinéaire à $v \Longleftrightarrow \alpha = k\pi \Longleftrightarrow \langle u, v\rangle' = (-1)^k ||u|| \times ||v||$.

Montrons maintenant que les deux expressions du produit scalaire coïncident bien.

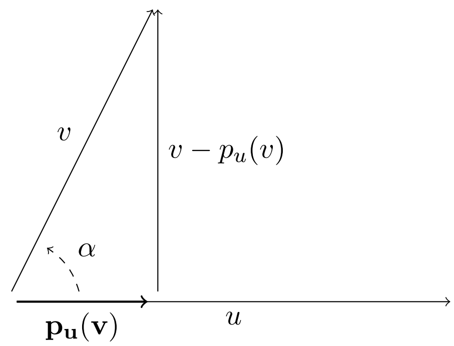
Si $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs, et $(0, i, j, k)$ est un repère orthonormé de $\mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
\langle u, v\rangle' &= \langle xi + yj + zk, x'i + y'j + z'k\rangle' \\
&= \langle xi, x'i\rangle' + \langle yj, y'j\rangle' + \langle zk, z'k\rangle' \\
&= xx' \langle i, i\rangle' + yy' \langle j, j\rangle' + zz' \langle z, z\rangle' \\
&= xx' + yy' + zz' \\
&= \langle u, v\rangle .
\end{aligned}$$

On a utilisé de manière essentielle le fait que le repère est orthonormé.

Projection orthogonale :

Le projeté orthogonal de v sur u, noté $p_u(v)$ est l'unique vecteur colinéaire à u tel que $v - p_u(v)$ soit orthogonal à u :



On a $||p_u(v)|| = ||u|| \cos(\alpha)$.

4 Produit vectoriel

Cette notion est spécifique à $\mathbb{R}^3$: cela signifie que si on travaille dans un plan en 2 dimensions ($\mathbb{R}^2$), la notion de produit vectoriel n'a aucun sens, au contraire du produit scalaire, qui fonctionne aussi bien en dimension 2 ou 3. Le produit vectoriel permet de répondre à la question suivante : étant donnés deux vecteurs u et v, comment trouver un troisième vecteur w tel que $(0, u, v, w)$ soit un repère orthogonal ? Ce w devra donc être orthogonal à u et à v simultanément. On comprend donc qu'il est impossible de trouver un tel w dans un plan.

Définition 11

Si u et v sont deux vecteurs de l'espace, d'angle α, on définit leur **produit vectoriel** $u \wedge v$ comme étant l'unique vecteur vérifiant :

1. $u \wedge v$ est orthogonal à u et v (direction) ;
2. $||u \wedge v|| = ||u||.||v||.|\sin(\alpha)|$ (norme) ;
3. $(u, v, u \wedge v)$ est direct, c'est-à-dire $\det(u, v, u \wedge v) = 1$ (sens).

Proposition 12 (Propriétés du produit vectoriel)

Soient u, v, w trois vecteurs de l'espace et λ un réel.

1. $(\lambda u) \wedge v = u \wedge (\lambda v) = \lambda(u \wedge v)$;
2. $(u + v) \wedge w = u \wedge w + v \wedge w$;
3. $u \wedge v = -v \wedge u$;
4. u, v colinéaires $\iff u \wedge v = 0$.

Expression en coordonnées : Soit $(0, i, j, k)$ un repère orthonormé. Avec ce que l'on a expliqué au-dessus, il est clair que $i \wedge j = k$. Soient maintenant $u \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $v \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ deux vecteurs. Alors :

$$u \wedge v = \begin{pmatrix} yz' - zy' \\ zx' - xz' \\ xy' - yx' \end{pmatrix}.$$

Remarque. $||u \wedge v||$ est l'aire du parallélogramme formé par les vecteurs u et v. Ainsi, le triangle formé par les vecteurs u et v est d'aire égale à $\frac{1}{2}||u \wedge v||$.

Définition 13 (Produit mixte)

Si u, v et w sont trois vecteurs de l'espace, on définit leur **produit mixte** par

$$[u, v, w] := \langle u, v \wedge w \rangle .$$

Proposition 14 (Propriétés du produit mixte)

1. $[u, v, w] = [v, w, u] = [w, u, v]$;
2. $[u, v, w] = -[u, w, v]$;
3. $[u, v, w] = 0 \iff u, v, w$ sont coplanaires ;
4. $[u, v, w] = \det(u, v, w)$.

Remarque. $||[u, v, w]||$ est égal au volume du parallélépipède formé par u, v, w. Ainsi, l'aire du tétraèdre formé par u, v, w vaut $\frac{1}{6}||[u, v, w]|| = \frac{1}{6}\det(u, v, w)$.

5 Représentations paramétriques et équations cartésiennes de droites et de plans

Soit A un point de l'espace, et u un vecteur. On note $\mathcal{D}(A,u)$ la droite passant par A et dirigée par u. Dans ces conditions, un point B appartient à $\mathcal{D}(A,u)$ si et seulement si ses coordonnées peuvent s'écrire comme celles de A plus un certain nombre de fois le vecteur u. Autrement dit,

$$B \in \mathcal{D}(A,u) \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{R},\ B = A + tu.$$

On obtient ainsi une description de la droite :

$$\mathcal{D}(A,u) = \{A + tu,\ t \in \mathbb{R}\}.$$

On peut exprimer cela en coordonnées :

$$\text{Si } A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix},\ \text{alors } \mathcal{D}(A,u) = \left\{ \begin{pmatrix} x_A + tu_1 \\ y_A + tu_2 \\ z_A + tu_3 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

5.1 Droites dans le plan

Si l'on se restreint au plan $\mathbb{R}^2$, on obtient une **représentation paramétrique** :

$$\text{Si } A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix} \text{ et } u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ \text{alors } \mathcal{D}(A,u) = \left\{ \begin{pmatrix} x_A + tu_1 \\ y_A + tu_2 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Pour obtenir une équation cartésienne de $\mathcal{D}(A,u)$ sous la forme "$ax+by+c=0$, il suffit de remarquer que si un point $M(x,y) \in \mathcal{D}(A,u)$, alors les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et u sont colinéaires, d'ou $\det(\overrightarrow{AM}, u) = 0$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x - x_A & u_1 \\ y - y_A & u_2 \end{vmatrix} = 0 &\Longleftrightarrow (x - x_A)u_2 = (y - y_A)u_1 \\ &\Longleftrightarrow xu_2 - x_A u_2 = yu_1 - y_A u_1 \\ &\Longleftrightarrow u_2 x - u_1 y - x_A u_2 + y_A u_1 = 0. \end{aligned}$$

On a donc bien obtenu une équation cartésienne de notre droite.

Réciproquement, supposons disposer d'une équation cartésienne d'une droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ (avec $(a,b) \neq (0,0)$). Avec ces données, on voit que la droite $\mathcal{D}$ passe par les points :

- $(-\frac{c}{a}, 0)$ si $a \neq 0$;
- $(0, -\frac{c}{b})$ si $b \neq 0$.

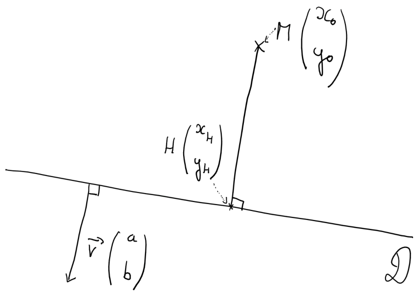
De plus, un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est donné par $u \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. On a donc tout ce qu'il nous faut pour obtenir une équation paramétrique.

Remarque. Si $v \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $u \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$, alors $u \perp v$. Ainsi, pour obtenir un vecteur directeur de $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$, il suffit de prendre un vecteur orthogonal à $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Théorème 15 (Distance d'un point à une droite dans le plan)

Soit un point $M(x_0, y_0)$, et $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$ une droite.

$$\text{Alors } d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$



Démonstration. Avec les notations du dessin, on voit qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{HM} = t\overrightarrow{v}$ et donc on obtient $d(M, \mathcal{D}) = ||\overrightarrow{HM}|| = |t| \times ||\overrightarrow{v}||$. Ainsi :

$$\overrightarrow{HM} \begin{pmatrix} x_0 - x_H \\ y_0 - y_H \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ||\overrightarrow{HM}|| = \sqrt{(x_0 - x_H)^2 + (y_0 - y_H)^2} = |t|\sqrt{a^2 + b^2}.$$

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} x_0 - x_H = ta \\ y_0 - y_H = tb \end{cases} \iff \begin{cases} x_H = x_0 - ta \\ y_H = y_0 - tb \end{cases}.$$

Alors

$$\begin{aligned} ax_H + by_H + c = 0 &\implies a(x_0 - ta) + b(y_0 - tb) + c = 0 \\ &\implies ax_0 + by_0 + c - t(a^2 + b^2) = 0 \\ &\implies ax_0 + by_0 + c = t||\overrightarrow{v}||^2 \\ &\implies ||\overrightarrow{v}|| \times |t| = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{||v||} \\ &\implies d(M, \mathcal{D}) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

□

5.2 Droites de l'espace

Dans $\mathbb{R}^2$, une droite est donnée par une seule équation : $ax + by + c = 0$. Dans $\mathbb{R}^3$, il en faut deux.

$$\text{Si } A \begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix} \text{ et } u \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \text{ alors } \mathcal{D}(A, u) = \left\{ \begin{pmatrix} x_A + tu_1 \\ y_A + tu_2 \\ z_A + tu_3 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R} \right\}.$$

C'est une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Pour trouver deux équations, on a besoin de deux vecteurs orthogonaux à u. On peut par exemple en trouver un, puis trouver le deuxième en faisant un produit vectoriel. Si $v\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $w\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$ sont deux vecteurs orthogonaux à u, on cherche d et d' tels que

$$\begin{cases} x_A v_1 + y_A v_2 + z_A v_3 + d = 0 \\ x_A w_1 + y_A w_2 + z_A w_3 + d' = 0. \end{cases}$$

Le système d'équations définissant $\mathcal{D}(A, u)$ est alors

$$\begin{cases} v_1 x + v_2 y + v_3 z + d = 0 \\ w_1 x + w_2 y + w_3 z + d' = 0. \end{cases}$$

Réciproquement, si on dispose d'un système d'équations et qu'on veut une représentation paramétrique, il suffit de prendre $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \\ z_A \end{pmatrix}$, avec x_A, y_A, z_A vérifiant le système, puis de prendre un vecteur u orthogonal à $v\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ et $w\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix}$. On pourra par exemple prendre $u = v \wedge w$.

Exemple :

On considère la droite $\mathcal{D}$ dans $\mathbb{R}^3$, donnée par le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z \quad = 0. \end{cases}$$

Cherchons une présentation paramétrique de $\mathcal{D}$. On constate que le point $A(1, -1, -1)$ est solution du système. Il nous faut maintenant un vecteur directeur. D'après ce qui précède, un vecteur directeur u de $\mathcal{D}$ est donné par :

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\mathcal{D} = \{A + tu,\ t \in \mathbb{R}\}$, ce qui donne la présentation paramétrique suivante.

$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - 3t \end{cases}$$

A partir de cette présentation paramétrique, essayez de trouver un système d'équations !

5.3 Plans de l'espace

Un plan de $\mathbb{R}^3$ est donné par une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$. Un système de 2 équations de ce type donne dont deux plans, et et si leur intersection existe, cela donne donc bien une droite, puisque l'intersection de deux plans (si elle existe) est une droite.

Si $\mathcal{P}$ est un plan, donné par une équation comme ci-dessus, on cherche à en donner une représentation paramétrique. On prend un point $A(x_A, y_A, z_A)$ solution de l'équation, et on trouve deux vecteurs $v\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

et $w\begin{pmatrix}w_1\\w_2\\w_3\end{pmatrix}$ orthogonaux à $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et non colinéaires entre eux. On obtient alors la présentation paramétrique voulue :

$$\begin{cases}x = x_A + tv_1 + sw_1\\ y = y_A + tv_2 + sw_2\\ z = z_A + tv_3 + sw_3\end{cases} \qquad t, s \in \mathbb{R}$$

Réciproquement, pour passer d'une représentation paramétrique à une équation cartésienne, on pose $u\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix} = v \wedge w$, et on cherche d tel que $x_Au_1 + y_Au_2 + z_Au_3 + d = 0$. L'équation du plan est alors

$$xu_1 + yu_2 + zu_3 + d = 0.$$

Remarque. On peut aussi utiliser le déterminant :

$$M(x, y, z) \in \mathcal{P}(A, v, w) \iff \det(\overrightarrow{AM}, v, w) = 0.$$

En développant cette égalité, on obtient une équation cartésienne du plan.

Théorème 16 (Distance d'un point à un plan)

Soit $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$ un plan, $M(x_M, y_M, z_M)$ un point. Alors

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Théorème 17 (Distance d'un point à une droite dans l'espace)

Avec les notations présentées sur le dessin ci-dessous,

$$d(M, \mathcal{D}) = ||\overrightarrow{HM}||, \quad \text{avec } H \text{ défini par } \overrightarrow{AH} = \frac{\left\langle \overrightarrow{AM}, u \right\rangle}{||u||^2} u.$$